7.6 Polytrope Zustandsänderungen

Die speziellen Zustandsänderungen lassen sich zusammenfassend darstellen.

Wenn man die bisher besprochenen speziellen Zustandsänderungen zusammen in ein p, v-Diagramm und ein T, s-Diagramm einträgt, zeigt sich, dass sich diese Kurven als zu einem Kurvenbüschel gehörend ansehen lassen (Bild 7-9). Es wird sich zeigen, dass diejenigen Zustandsänderungen, die zwischen den speziellen verlaufen, besondere praktische Bedeutung haben.

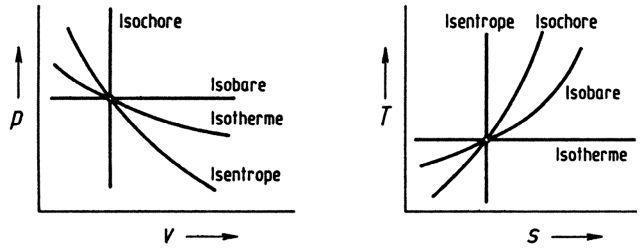


Bild 7-9
Die speziellen Zustandsänderungen Idealer Gase im p, v-Diagramm und im T, s-Diagramm

Dieses Kurvenbüschel lässt sich mathematisch durch die Gleichung

$$p \cdot v^{n} = \text{const.} \tag{7.38}$$

darstellen. Die Kurven des Büschels werden als *Polytropen*, die Gleichung als *Polytropengleichung* bezeichnet. Der Exponent n heißt entsprechend *Polytropenexponent*. Die Bezeichnung *Polytrope* erscheint so als Oberbegriff für die speziellen und alle dazwischenliegenden Zustandsänderungen. In der Praxis werden mit *Polytrope* meistens die zwischen der Isotherme und der Isentropen liegenden Zustandsänderungen (diese beiden ausgeschlossen) bezeichnet. Mit diesen Polytropen lassen sich die in Motoren und Verdichtern ablaufenden Vorgänge näherungsweise wiedergeben und wie reversible Zustandsänderungen berechnen.

Ersetzt man in der Polytropengleichung (7.38) eine der beiden Zustandsgrößen p oder v durch die Temperatur T und formt mit Hilfe der Gasgleichung (6.1) um, so ergeben sich wie bei der Isentropen zwei weitere Beziehungen zwischen den thermischen Zustandsgrößen.

$$T \cdot v^{n-1} = \text{const.} \tag{7.39}$$

$$p^{n-1}\, T^{-n} = \text{const.} \tag{7.40}$$

Die Werte des Polytropenexponenten n lassen sich mit wenigen Umformungen ermitteln.

Isobare	$p\,v^{n} =$	$p\,v^{0} = p$	$=$ const.	$n = 0$	(7.41)
Isotherme	$p\,v^{n} =$	$p\,v^{1} = R\,T$	$=$ const.	$n = 1$	(7.42)
Isentrope	$p\,v^{n} =$	$p\,v^{\kappa}$	$=$ const.	$n = \kappa$	(7.43)
Isochore	v $=$	const. $p^{-1/n}$	$=$ const. p^{0}	$n \to \infty$	(7.44)

Arbeiten und Wärmen – Volumenarbeit w_{V}, Druckarbeit w_{p} und übertragene Wärme q lassen sich aus dem Ansatz für die Volumenarbeit, aus dem Ersten Hauptsatz, den Kalorischen Zustandsgleichungen für Ideale Gase und einer der Polytropengleichungen ermitteln. Tabelle 7-3 zeigt den Berechnungsgang.

$$w_{\text{V}12} = \frac{1}{n-1}\, R\,(T_2 - T_1) \tag{7.45}$$

$$w_{V12} = \frac{1}{n-1} R T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] \tag{7.46}$$

$$w_{p12} = \frac{n}{n-1} R (T_2 - T_1) \tag{7.47}$$

$$w_{p12} = \frac{n}{n-1} R T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] \tag{7.48}$$

$$q_{12} = c_v \frac{n-\kappa}{n-1} (T_2 - T_1) \tag{7.49}$$

Die Gleichungen für die beiden polytropen Arbeiten sind in gleicher Weise aufgebaut wie die Gleichungen für isentrop umgesetzte Arbeiten. Vergleicht man die Beziehungen für Volumenarbeit w_V und Druckarbeit w_p miteinander, so zeigt sich, dass beide sich nur durch den Faktor n unterscheiden.

$$w_{p12} = n\, w_{V12} \tag{7.50}$$

Die bei polytropen Zustandsänderungen übertragene Wärme q lässt sich in der Form

$$q_{12} = c_n (T_2 - T_1) \tag{7.51}$$

schreiben. Darin ist c_n die *spezifische polytrope Wärmekapazität.*

$$c_n = c_v \frac{n-\kappa}{n-1} \tag{7.52}$$

Die Wärmekapazität c_n ist keine Stoffgröße, da sie außer von c_v und κ auch noch vom Polytropenexponenten n abhängt, also vom Verlauf der Zustandsänderung. Bild 7-10 zeigt, dass c_n im technisch wichtigen Bereich für Expansionsvorgänge zwischen $n = 1$ und $n = \kappa$ negative Werte hat, während bei Kompressionsvorgängen für $n > \kappa$ positive Werte gelten.

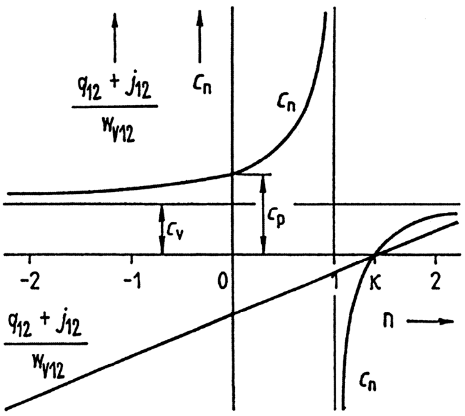


Bild 7-10
Abhängigkeit der spezifischen polytropen Wärmekapazität c_n und des Verhältnisses $(q_{12} + j_{12})/w_{V12}$ vom Polytropenexponenten n.

Für $n = 0$ wird $c_n = c_p$,
für $n \to \infty$ nähert sich c_n dem Wert c_v.

Aus einem negativen Wert der Wärmekapazität c_n folgt für eine polytrope Expansion, da die Temperaturdifferenz ebenfalls negativ wird, dass dem expandierenden Gas Wärme oder auch Streuenergie zufließt. Eine polytrope Kompression ist zwischen $n = 1$ und $n = \kappa$ nur bei gleichzeitiger Wärmeabgabe des Gases möglich.

Tabelle 7-3 Arbeiten und Wärmen bei polytropen Zustandsänderungen

Volumenarbeit w_{V12}

$$w_{V12} = -\int_1^2 p\,\mathrm{d}v \qquad (4.19) \qquad\qquad p \cdot v^n = p_1 \cdot v_1^n \qquad (7.37)$$

$$= p_1 v_1^n \int_2^1 p \frac{\mathrm{d}v}{p v^n} = p_1 v_1^n \int_2^1 \frac{\mathrm{d}v}{v^n} \qquad\qquad 1 = \frac{p_1 \cdot v_1^n}{p \cdot v^n} = \frac{p_1^{\frac{1}{n}} \cdot v_1}{p^{\frac{1}{n}} \cdot v}$$

$$= p_1 v_1 v_1^{n-1} \cdot \frac{1}{1-n}(v_1^{1-n} - v_2^{1-n}) = \frac{p_1 v_1}{n-1}\left(\frac{v_2^{1-n}}{v_1^{1-n}} \cdot \frac{p_2 v_2^n}{p_1 v_1^n} - \frac{v_1^{1-n}}{v_1^{1-n}}\right)$$

$$w_{V12} = \frac{p_1 v_1}{n-1}\left(\frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} - 1\right) = \frac{1}{n-1}(p_2 v_2 - p_1 v_1) = \frac{1}{n-1} R (T_2 - T_1) \qquad (7.45)$$

$$w_{V12} = \frac{p_1 v_1}{n-1}\left(\frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} \cdot \frac{p_1^{\frac{1}{n}} v_1}{p_2^{\frac{1}{n}} v_2} - 1\right) = \frac{R T_1}{n-1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right] \qquad (7.46)$$

Wärme q_{12}

$$q_{12} = (u_2 - u_1) - w_{V12} \qquad (4.38) \qquad\qquad u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1) \qquad (6.24)$$

$$= c_v (T_2 - T_1) - \frac{R}{n-1}(T_2 - T_1) \qquad\qquad R = c_p - c_v \qquad (6.38)$$

$$= \frac{c_v (n-1) - (c_p - c_v)}{n-1}(T_2 - T_1) \qquad\qquad \kappa = \frac{c_p}{c_v} \qquad (6.74)$$

$$q_{12} = c_v \frac{n-\kappa}{n-1}(T_2 - T_1) \qquad (7.49)$$

Druckarbeit w_{p12}

$$w_{p12} = (h_2 - h_1) - q_{12} \qquad (4.37) \qquad\qquad h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1) \qquad (6.23)$$

$$= c_p (T_2 - T_1) - c_v \frac{n-\kappa}{n-1}(T_2 - T_1) \qquad\qquad R = c_p - c_v \qquad (6.38)$$

$$= \frac{c_p n - c_p - c_v n + c_p}{n-1}(T_2 - T_1) \qquad\qquad \kappa = \frac{c_p}{c_v} \qquad (6.74)$$

$$w_{p12} = \frac{n}{n-1} R (T_2 - T_1) \qquad (7.47) \qquad\qquad w_{p12} = \frac{n}{n-1} R T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right] \qquad (7.48)$$

Dissipation und Wärmeaustausch – Bei wirklichen Prozessen, vor allem in Kolbenmaschinen, bestimmen der Wärmeaustausch mit als Wärmespeicher wirkenden Begrenzungswänden und andere Dissipationsvorgänge wie Reibung und Verwirbelung den Verlauf der Zustandsänderung und damit den Polytropenexponenten. Bei einer Expansion wird ein Teil der vom Gas abgegebenen Arbeit w dissipiert und verbleibt als Streuenergie j im Gas. Beim Verdichten muss die Streuenergie j durch erhöhte Arbeitszufuhr ausgeglichen werden. Beide Dissipationsvorgänge wirken wie eine zusätzliche Wärmeübertragung, sodass die Gleichungen in gleicher Weise wie für eine reversible Zustandsänderung abgeleitet werden können.

Die Gleichungen für die Polytropen decken also auch solche Zustandsänderungen ab, bei denen die Verhältnisse von übertragener Wärme q einschließlich der Streuenergie j zu übertragener Arbeit w_V nicht denen bei den speziellen Zustandsänderungen entsprechen. Aus den

Gleichungen (7.45) und (7.49) lässt sich das Verhältnis $(q + j) / w_V$ leicht ableiten [Gleichung (7.53)]. Bild 7-10 zeigt, in welchen Bereichen des Polytropenexponenten n Wärme q und Streuenergie j das gleiche und in welchen sie verschiedene Vorzeichen wie die Arbeit w_V haben.

$$\frac{q_{12} + j_{12}}{w_{V12}} = -\frac{\kappa - n}{\kappa - 1} \tag{7.53}$$

Wenn polytrope Zustandsänderungen dissipationsbehaftet sind, ist die spezifische Technische Arbeit w_t [Gleichung (4.30)] auch bei Vernachlässigung der Hubarbeit w_H und der Beschleunigungsarbeit w_B nicht gleich der Druckarbeit w_p. Mit spezifischen Größen gilt dann

$$w_{t12} = w_{p12} + j_{12}. \tag{7.54}$$

Die Arbeitsleistung P_{ad} adiabater Maschinen lässt sich, wenn Eintritts- und Austrittszustand bekannt sind, mit den Gleichungen (4.3) und (6.23) bestimmen.

$$(P_{12})_{ad} = \dot{m}\,(h_2 - h_1) = \dot{m}\,c_p\,(T_2 - T_1) \tag{7.55}$$

■ **Beispiel 7.6** Ein adiabater Druckluftmotor verbraucht 0,0324 m³/s Druckluft mit einem Überdruck von 3,68 bar und einer Eintrittstemperatur von 25,4 °C. Am Motoraustritt wird eine Temperatur von 4,2 °C bei einem Umgebungsdruck von 0,92 bar gemessen. (Die Luft soll als Ideales Gas mit konstanten Stoffwerten behandelt werden.)

Welche Arbeitsleistung gibt die Druckluft im Motor ab? Welchen isentropen Gütegrad erreicht die Expansion im Motor? Welcher Polytropenexponent ergibt sich aus den Messdaten?

Daten	Druckluftverbrauch	$\dot{V}_1$	$= 0{,}0324\ \mathrm{m^3/s}$	
	Eintrittszustand	p_1	$= p_ü + p_{amb} = (3{,}68 + 0{,}92)\ \mathrm{bar} = 4{,}60\ \mathrm{bar}$	
		t_1	$= 25{,}4\ °\mathrm{C}$	$T_1 = 298{,}6\ \mathrm{K}$
	Austrittszustand	p_{amb}	$= p_2 = 0{,}92\ \mathrm{bar}$	
		t_2	$= 4{,}2\ °C$	$T_2 = 277{,}4\ \mathrm{K}$

Arbeitsleistung P [Gleichung (7.55), (6.2), Bild 6.10]

$$P = \dot{m}\,c_p\,(T_2 - T_1) = 0{,}174\ \mathrm{kg/s} \cdot 1{,}004\ \mathrm{kJ/(kgK)} \cdot (277{,}4 - 298{,}6)\ \mathrm{K} = -3{,}67\ \mathrm{kW}$$

$$\dot{m} = \frac{p_1 \dot{V}_1}{R T_1} = \frac{4{,}60 \cdot 10^2\ \mathrm{kN} \cdot 3{,}24 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^3\ kg\,K}}{\mathrm{m^2\,s} \cdot 0{,}2872\ \mathrm{kJ} \cdot 298{,}6\ \mathrm{K}} = 0{,}1738\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

Isentroper Gütegrad η_s [Gleichung (6.56), (7.29)]

$$\eta_s = \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_{2s}} = \frac{(298{,}6 - 277{,}4)\ \mathrm{K}}{(298{,}6 - 188{,}5)\ \mathrm{K}} = 0{,}193 \qquad T_{2s} = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 298{,}6\,\mathrm{K} \left(\frac{0{,}92\ \mathrm{bar}}{4{,}60\ \mathrm{bar}}\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} = 188{,}5\ \mathrm{K}$$

Polytropenexponent n [Gleichung (7.40)]

$$n = \frac{\ln(p_1/p_2)}{\ln(p_1/p_2) - \ln(T_1/T_2)} = \frac{\ln(4{,}60/0{,}92)}{\ln(4{,}60/0{,}92) - \ln(298{,}6/277{,}4)} = 1{,}048$$

Ergänzung Hier sei die isentrope Arbeitsleistung P_S und mit dieser nochmals der isentrope Gütegrad η_s errechnet.

$$P_s = \dot{m}\ c_p(T_{2s} - T_1) = 0{,}1738\ \mathrm{kg/s} \cdot 1{,}004\ \mathrm{kJ/kg\,K}\ (188{,}5 - 298{,}6)\ \mathrm{K} = -19{,}21\ \mathrm{kW}$$

$$\eta_s = \frac{P}{P_s} = \frac{-3{,}67\ \mathrm{kW}}{-19{,}21\ \mathrm{kW}} = 0{,}192$$

Der niedrige Wert des Gütegrades η_S spiegelt sich wider im Wert der zeitbezogenen Streuarbeit $\dot{J}$ [Gleichung (7.54)].

$$\dot{J} = P - P_s = \dot{m}\ c_p\,(w_t - w_p) = -3{,}67\ \mathrm{kW} - (-19{,}21)\ \mathrm{kW} = 15{,}54\ \mathrm{kW}$$

Diese wirkt wie eine nach der isentropen Expansion isobar zugeführte Wärme [Bild 6.10].

■ **Beispiel 7.7** Zur Auswertung von Versuchen, bei denen Drücke und Temperaturen während eines Kompressions- oder Expansionsvorganges, etwa in einer Kolbenmaschine, gemessen wurden, wird die Polytropengleichung (7.38) so umgeformt, dass eine Geradengleichung entsteht.

$$p \cdot \upsilon_n = p_1 \cdot \upsilon_1^n = p_2 \cdot \upsilon_2^n \qquad \ln \frac{p_1}{p_2} = n \ln \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}$$

Variabeln dieser Geradengleichung sind die Logarithmen des Druckverhältnisses und des Volumenverhältnisses. Diese Logarithmen sind die (verdeckten) Koordinaten eines auf Potenzpapier gezeichneten *p, υ*-Diagramms (Bild 7-11). Man trägt die gemessenen Werte *p* und *υ* ein und gleicht durch eine Grade aus. Mit zwei geeigneten Wertepaaren der Ausgleichsgeraden (p_1, υ_1) und (p_2, υ_2) lässt sich der Polytropenexponent *n* errechnen.

$$n = \frac{\ln p_2 - \ln p_1}{\ln \upsilon_1 - \ln \upsilon_2}$$

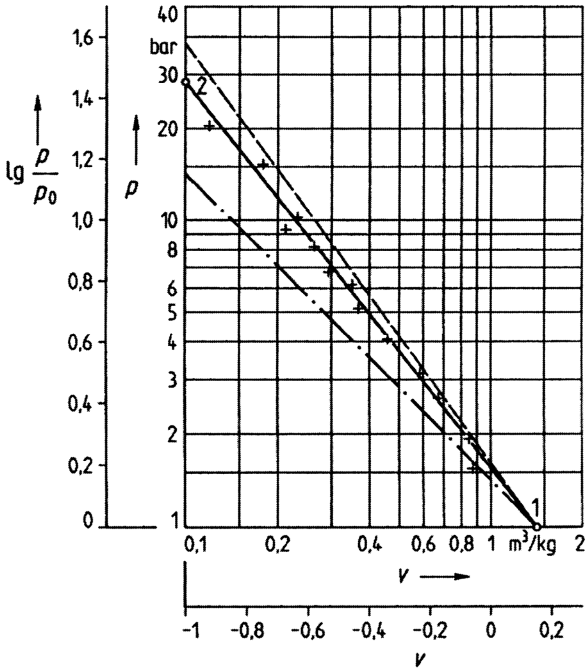


Bild 7-11
Graphische Ermittlung eines Polytropenexponenten

+	Messpunkte
○	Punkte 1 und 2 der Ausgleichsgeraden
— — —	Isentrope n = 1,4
—·—	Isotherme n = 1

Die Auswertung der in Bild 7-11 eingetragenen Messwerte ergibt die folgende Rechnung.

p_2 = 28 bar; $\lg p_2$ = 1,45
p_1 = 1 bar; $\lg p_1$ = 0,00
$\lg p_2 - \lg p_1$ = 1,45
υ_1 = 1,4 m³/kg; $\lg \upsilon_1$ = 0,15
υ_2 = 0,1 m³/kg; $\lg \upsilon_2$ = – 1,00
$\lg \upsilon_1 - \lg \upsilon_2$ = 1,15
n = 1,45/1,15 = 1,26

Kontrolle:
$p_2 = p_1\,(\upsilon_1/\upsilon_2)^n$
$= 1 \text{ bar } (1{,}4/0{,}1)^{1{,}26}$
p_2 = 27,8 bar

Eine bessere Übereinstimmung ist bei diesem graphischen Verfahren nicht zu erwarten und wegen der Streuung der Versuchsergebnisse auch nicht notwendig. Bei höheren Genauigkeitsanforderungen müssten die Messwerte rechnerisch nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ausgewertet werden.

7.7 Fragen und Übungen

Frage 7.1 Mit welcher Gleichung kann man bei einer isentropen Zustandsänderung eines Idealen Gases die übertragene Wärme q_{12} berechnen?

(a) $q_{12} = c_v\,\Delta T$
(b) $q_{12} = c_p\,\Delta T$
(c) $q_{12} = \kappa w_{V12}$
(d) $q_{12} = \kappa w_{P12}$
(e) $q_{12} = w_{V12} / \kappa - 1$
(f) Mit keiner dieser Gleichungen

Frage 7.2 Ein Ballon steigt von der Erdoberfläche auf. Der Luftdruck auf der Erdoberfläche beträgt 0,960 bar. Wie groß ist der Luftdruck, wenn das Ballonvolumen bei unveränderter Temperatur auf 133 Prozent zugenommen hat?

(a) 1340 hPa (c) 810 hPa (e) 320 hPa
(b) 1277 hPa (d) 722 hPa (f) 240 hPa

Frage 7.3 Welche Beziehung gilt immer für eine isotherme Zustandsänderung eines Idealen Gases?

(a) $dp = 0$ (c) $du = c_v\,dT$
(b) $dw_v = -dq$ (d) Keine der vorstehenden Beziehungen

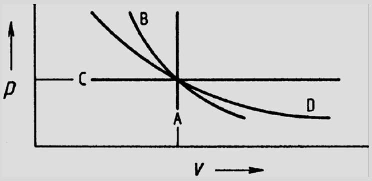
Frage 7.4 Wie kann eine bei einer isobaren Zustandsänderung zugeführte oder abgeführte Wärme in den folgenden Diagrammen dargestellt werden?

Diagramm	p, v	T, s	h, s	p, h	p, t
Als Strecke	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)
Als Fläche	(b)	(b)	(b)	(b)	(b)
Gar nicht	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)

Frage 7.5 Ordnen Sie den im p, v-Diagramm (Bild 7-12) eingezeichneten Kurven den entsprechenden Polytropenexponenten n derart zu, dass sie durch den Potenzansatz $p \cdot v^n$ = const. dargestellt werden können. (Abszisse und Ordinate sind linear geteilt.)

Kurve	A	B	C	D
n = 0	(a)	(a)	(a)	(a)
n = 1	(b)	(b)	(b)	(b)
n = κ	(c)	(c)	(c)	(c)
n = ∞	(d)	(d)	(d)	(d)

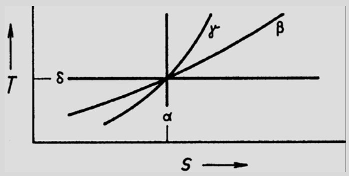
Bild 7-12



Frage 7.6 Ordnen Sie den im T, s-Diagramm (Bild 7-13) eingezeichneten Kurven den entsprechenden Polytropenexponenten n derart zu, dass sie durch den Potenzansatz $p \cdot v^n$ = const. dargestellt werden können. (Abszisse und Ordinate sind linear geteilt.)

Kurve	α	β	γ	δ
n = 0	(a)	(a)	(a)	(a)
n = 1	(b)	(b)	(b)	(b)
n = κ	(c)	(c)	(c)	(c)
n = ∞	(d)	(d)	(d)	(d)

Bild 7-13



Frage 7.7 Welche der folgenden Beziehungen gilt für die isochoren Zustandsänderungen Idealer Gase?

(a) pv = const. (d) $q_{12} = c_v\,(T_2 - T_1)$ (g) Keine der vorstehenden Beziehungen
(b) P/T = const. (e) $w_{12} = q_{12}$
(c) $R\,T$ = const. (f) $w_p = 0$

Frage 7.8 Bei welcher Temperatur hat die Dichte von Luft den halben Wert der Dichte beim Umgebungszustand (t_1 = 15 °C, p_1 = 1 bar) erreicht, wenn der Druck konstant bleibt?

(a) t_2 = 30 °C (c) T_2 = 303 K (e) T_2 = 576 K
(b) t_2 = 188 °C (d) T_2 = 561 K (f) Bei völlig anderer Temperatur

Frage 7.9 Ein Sporttaucher atmet Luft aus einer Vorratsflasche über einen Druckregler, der die Atemluft automatisch dem der Tauchtiefe entsprechenden Wasserdruck angleicht. Es sei angenommen, dass der Taucher in einer Wassertiefe von 30 m seine Lungen mit 3 Liter Luft füllt.
Welches Volumen würde die Luft theoretisch einnehmen, wenn der Taucher ohne Ausatmen an die Wasseroberfläche steigt?

(a) 0,75 Liter (c) 3 Liter (e) 12 Liter
(b) 1 Liter (d) 9 Liter