

5 Elastisch-plastische Bruchmechanik

5.1 Allgemeines

Belastet man ein Bauteil aus duktilem Material, das einen Riss enthält, so kommt es zunächst in der Umgebung der Rissspitze zur Plastizierung. Dies hat zur Folge, dass mit zunehmender Belastung die Spitze mehr und mehr abstumpft: der Riss öffnet sich. Gleichzeitig wächst der plastische Bereich an, was je nach Werkstoff und Bauteilgeometrie zur völligen Durchplastizierung führen kann. Bei einer bestimmten kritischen Belastung kommt es schließlich zur Initiierung des Risswachstums. In einem solchen Fall, wenn also kein Kleinbereichsfließen stattfindet, sondern größere plastische Zonen auftreten, kann die lineare Bruchmechanik nicht mehr angewendet werden. Die Bruchparameter und Bruchkonzepte, die wie das K -Konzept auf dem (außerhalb der Prozesszone) linear elastischen Materialverhalten basieren, haben dann ihre Bedeutung verloren. Man muss in diesem Fall vielmehr Parameter und Konzepte heranziehen, die dem nunmehr in größerem Bereich auftretenden plastischen Materialverhalten Rechnung tragen.

In der elastisch-plastischen Bruchmechanik haben sich zwei alternative Parameter zur Charakterisierung des Rissspitzenzustandes durchgesetzt. Der eine ist das von J. Rice (1968) vorgeschlagene J -Integral, welches in der Bedeutung eines Spannungs- bzw. Verformungsintensitätsfaktors und nicht etwa einer Energiefreisetzungsrates gebraucht wird. Beim zweiten handelt es sich um die *Rissspitzenöffnung* δ_t oder $CTOD$ (= crack tip opening displacement), die ein Maß für den Deformationszustand an der Rissspitze sein soll. Dieser Vorschlag geht auf A.H. Cottrell und A.A. Wells (1963) zurück. Während J im wesentlichen durch die Deformationstheorie der Plastizität begründet wird, ist die Verwendung von δ_t eher experimentell und anschaulich motiviert. Wir werden allerdings zeigen, dass beide Größen meist direkt ineinander überführbar sind.

Bei der Behandlung von elastisch-plastischen Rissproblemen werden wir uns auf einfache Materialmodelle der zeitunabhängigen Plastizität, wie zum Beispiel auf das idealplastische Material oder auf die Deformationstheorie beschränken. Außerdem setzen wir voraus, dass die äußere Belastung monoton zunimmt; eine globale Entlastung oder gar eine Wechselbelastung sei ausgeschlossen. Nur dann ist es in wenigen Sonderfällen möglich, zu Lösungen in analytischer Form zu gelangen, die eine Basis für Bruchkonzepte bilden. Bei aufwendigen Materialmodellen oder bei der elastisch-plastischen Analyse von realen Bauteilen ist

man dagegen auf numerische Methoden angewiesen. Wie schon in der linearen Bruchmechanik werden wir uns auch hier auf ebene Probleme mit geraden Rissen unter Modus I Belastung konzentrieren.

5.2 Dugdale Modell

In dünnen Platten aus duktilem Material beobachtet man häufig zungenförmige plastische Zonen vor der Rissspitze (Bild 5.1a). Diese kommen im wesentlichen durch Gleiten in Schnitten unter 45° zur Plattenebene zustande, wodurch ihre Ausdehnung in y -Richtung auf die Größenordnung der Plattendicke beschränkt ist (vgl. Abschnitt 4.7.2).

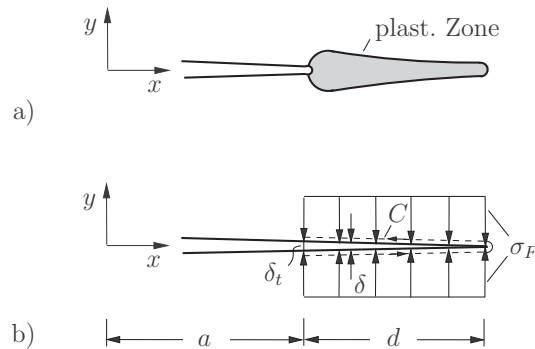


Bild 5.1 Dugdale Modell

Eine einfache Modellierung des entsprechenden elastisch-plastischen Modus I-Problems geht auf D.S. Dugdale (1960) zurück. Hierbei wird das Material als elastisch-idealplastisch angenommen und vorausgesetzt, dass die Ausdehnung der plastischen Zone in y -Richtung klein ist im Vergleich zu ihrer Länge d . Dann kann die plastische Zone als eine Linie (Streifen) angesehen werden, entlang welcher im ESZ nach der Trescaschen Fließbedingung die Fließspannung σ_F wirkt. Damit ist die Aufgabe auf das rein elastische Problem eines Risses zurückgeführt, der fiktiv um die Strecke d verlängert ist und dessen Rissflanken dort durch σ_F belastet sind (Bild 5.1b). Die noch unbekannte Länge d folgt aus der Bedingung, dass die Spannungen nirgends die Fließspannung überschreiten dürfen. Danach darf an der Spitze des fiktiven Risses (=Ende der plastischen Zone) auch keine Spannungssingularität auftreten, d.h. der K -Faktor muss verschwinden. Ausdrücklich sei betont, dass die Länge der plastischen Zone in diesem Modell keinen Einschränkungen unterliegt; sie kann hier durchaus von der Größenordnung der Risslänge oder einer anderen charakteristischen Länge sein.

Entlang der fiktiven Rissverlängerung tritt eine Relativverschiebung der Risssufer um $\delta = v^+ - v^-$ auf. Diese nimmt an der Rissspitze den Wert δ_t (= Rissspitzenöffnung) an und ist am Ende der plastischen Zone Null. Interpretiert man δ als Resultat der plastischen Deformation, dann ist δ_t ein mögliches Maß für den Verformungszustand an der Rissspitze. Damit lässt sich ein elastisch-plastisches Bruchkriterium für die Initiierung des Rissfortschrittes in der Form

$$\boxed{\delta_t = \delta_{tc}} \quad (5.1)$$

postulieren. Darin ist die kritische Rissöffnung δ_{tc} ein Werkstoffkennwert.

Wir wollen nun noch das J -Integral bestimmen. Hierzu wählen wir zweckmäßig eine Kontur C , die entlang der unteren und der oberen Flanke des Fließstreifens verläuft (Bild 5.1b). Nach (4.119) erhält man dann mit $dy = 0$ und $\tau_{xy} = 0$ für J den Ausdruck

$$J = -\sigma_F \int_a^{a+d} \frac{\partial}{\partial x} [v^+ - v^-] dx = -\sigma_F [\delta]_a^{a+d} .$$

Hieraus folgt wegen $\delta(a+d) = 0$ und $\delta(a) = \delta_t$ der einfache Zusammenhang

$$J = \sigma_F \delta_t . \quad (5.2)$$

Im Rahmen des Dugdale Modells ist danach ein Bruchkriterium

$$\boxed{J = J_c} \quad (5.3)$$

äquivalent zum δ_t -Kriterium (5.1). Darin ist $J_c = \sigma_F \delta_{tc}$ ein Materialkennwert, der angibt, wann Risswachstum einsetzt.

Wendet man das Dugdale Modell auf einen Riss der Länge $2a$ im unendlichen Gebiet unter einachsigen Zug an, so ergibt sich die in Bild 5.2 dargestellte Konfiguration. Dabei ist es zweckmäßig, die Lösung durch Superposition der beiden Lastfälle (1) „einachsiger Zug“ und (2) „Rissflankenbelastung“ zu gewinnen. Mit den Bezeichnungen nach Bild 5.2 gilt für die entsprechenden K -Faktoren (vgl. Abschnitt 4.4.1)

$$K_I^{(1)} = \sigma \sqrt{\pi b} , \quad K_I^{(2)} = -\frac{2}{\pi} \sigma_F \sqrt{\pi b} \arccos \frac{a}{b}$$

und für die Verschiebungen in y -Richtung an der physikalischen Rissspitze ($x = a$)

$$v^{(1)}(a) = \frac{2\sigma}{E'} \sqrt{b^2 - a^2} ,$$

$$v^{(2)}(a) = \frac{4\sigma_F}{\pi E'} \left[-\sqrt{b^2 - a^2} \arccos \frac{a}{b} + a \ln \frac{b}{a} \right] .$$

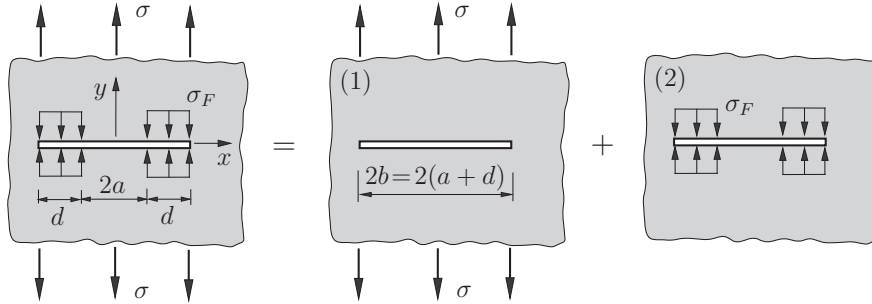


Bild 5.2 Dugdale Modell beim Riss unter einachsiger Zug

Aus der Bedingung $K_I^{(1)} + K_I^{(2)} = 0$ ergibt sich die Größe der plastischen Zone zu

$$d = b - a = a \left[\left(\cos \frac{\pi \sigma}{2 \sigma_F} \right)^{-1} - 1 \right]. \quad (5.4)$$

Hiermit erhält man für die Risspitzenöffnung (aus Symmetriegründen ist $v^- = -v^+$)

$$\delta_t = 2 [v^{(1)}(a) + v^{(2)}(a)] = \frac{8 \sigma_F}{\pi E'} a \ln \left(\cos \frac{\pi \sigma}{2 \sigma_F} \right)^{-1} \quad (5.5)$$

und für das J -Integral

$$J = \sigma_F \delta_t = \frac{8 \sigma_F^2}{\pi E'} a \ln \left(\cos \frac{\pi \sigma}{2 \sigma_F} \right)^{-1}. \quad (5.6)$$

In Bild 5.3a ist die Größe der plastischen Zone nach (5.4) dargestellt. Dieses Ergebnis steht für $\sigma \lesssim 0,9 \sigma_F$ in guter Übereinstimmung mit experimentellen Resultaten. Für $\sigma \rightarrow \sigma_F$ ergibt sich $d \rightarrow \infty$, was einer völligen Durchplastizierung entspricht. Dann ist die *Grenzlaster* (limit load) erreicht, und Versagen tritt durch *plastischen Kollaps* auf.

Für hinreichend kleine Belastung ($\sigma \ll \sigma_F$) werden die plastischen Zonen so klein, dass Kleinbereichsfließen vorliegt. Wir befinden uns dann im Gültigkeitsbereich der linearen Bruchmechanik. In diesem Fall erhält man mit

$$\left(\cos \frac{\pi \sigma}{2 \sigma_F} \right)^{-1} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \sigma}{2 \sigma_F} \right)^2 \quad \text{und} \quad \sigma \sqrt{\pi a} = K_I$$

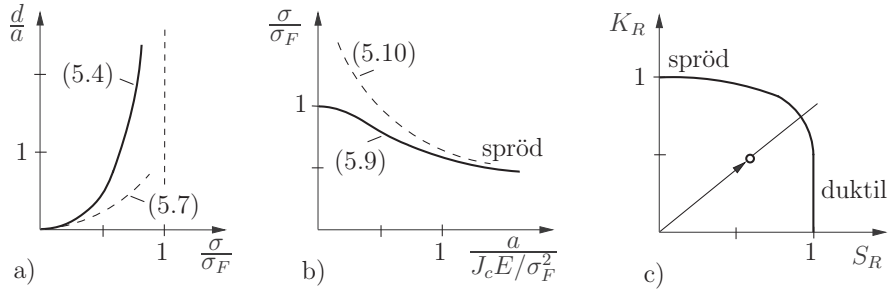


Bild 5.3 a) plastische Zonengröße, b) Versagenslast, c) Versagensgrenzkurve

aus (5.4) die plastische Zonengröße

$$d = 2r_p^D = \frac{a}{2} \left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_F} \right)^2 = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_I}{\sigma_F} \right)^2. \quad (5.7)$$

Dabei deutet der Buchstabe D an, dass sie mit dem Dugdale Modell bestimmt wurde. Analog ergibt sich für δ_t und für J in diesem Grenzfall

$$\delta_t = \frac{K_I^2}{E'\sigma_F}, \quad J = \frac{K_I^2}{E'}. \quad (5.8)$$

Dies bedeutet, dass die Bruchkriterien (5.1) und (5.3) der elastisch–plastischen Bruchmechanik im Fall des Kleinbereichsfließens in die Bruchkriterien der linearen Bruchmechanik (K -Konzept) übergehen. Die Ausdehnung der plastischen Zone nach (5.7) stimmt größenordnungsmäßig gut mit der Irwinschen Abschätzung (4.112) für den ESZ überein.

Setzt man (5.6) in das Bruchkriterium (5.3) ein, so erhält man für den allgemeinen elastisch-plastischen Fall mit beliebig großen plastischen Zonen

$$\frac{8}{\pi} \ln \left(\cos \frac{\pi\sigma}{2\sigma_F} \right)^{-1} = \frac{J_c E}{\sigma_F^2} \frac{1}{a}. \quad (5.9)$$

Hieraus folgt im Spezialfall der linearen Bruchmechanik ($\sigma \ll \sigma_F$)

$$\pi \left(\frac{\sigma_{lin}}{\sigma_F} \right)^2 = \frac{J_c E}{\sigma_F^2} \frac{1}{a}. \quad (5.10)$$

Diese Beziehungen beschreiben bei gegebenen Materialparametern J_c , E , σ_F die Abhängigkeit der Versagenslast σ von der Risslänge a im allgemeinen elastisch-plastischen Fall bzw. im linearen Fall. Bild 5.3b zeigt, dass für kleine a duktiles

Versagen vorherrscht; die Versagenslast liegt hier in der Nähe der plastischen Grenzlast. Für große a befindet man sich dagegen im Bereich der linearen Bruchmechanik; Versagen wird dann spröd erfolgen.

Eine von der Risslänge unabhängige Darstellung der Versagensbedingung lässt sich gewinnen, wenn man (5.9) in (5.10) einsetzt. Mit den Bezeichnungen $\sigma/\sigma_{\text{lin}} = K_I/K_{Ic} = K_R$ und $\sigma/\sigma_F = S_R$ ergibt sich auf diese Weise die *Versagensgrenzkurve* (failure assessment curve)

$$K_R = S_R \left[\frac{8}{\pi^2} \ln \left(\cos \frac{\pi}{2} S_R \right)^{-1} \right]^{-1/2}. \quad (5.11)$$

Man kann sie als Versagensbedingung im elastisch-plastischen Bereich zwischen den beiden Grenzfällen des Sprödbruchs ($K_R = 1$) und des plastischen Kollapses ($S_R = 1$) interpretieren (Bild 5.3c). Wegen der direkten Proportionalität von K_I und σ ist ein Belastungsvorgang im Diagramm durch die Bewegung eines Punktes auf einem radialen Strahl nach außen gekennzeichnet. Der Abstand des Punktes zur Grenzkurve kann als ein Maß für die Sicherheit gegenüber Versagen angesehen werden.

Obwohl (5.11) genaugenommen nur für das Beispiel nach Bild 5.2 gilt, wird diese Beziehung wegen ihrer Einfachheit in den technischen Anwendungen häufig auch auf andere Risskonfigurationen bzw. Bauteile angewendet. Dabei ersetzt man σ durch die Bauteilbelastung P und σ_F durch die entsprechende plastische Grenzlast P_G und sieht (5.11) als universell gültig an.

Das Dugdale Modell ist trotz seiner Einfachheit in der Lage, die wesentlichen Phänomene beim elastisch-plastischen Bruch zu beschreiben. Obwohl ursprünglich nur für dünne Platten im ESZ gedacht, wird es vielfach auch im EVZ oder in modifizierter Form bei dreidimensionalen Problemen (z.B. beim kreisförmigen Riss) angewendet und führt dort zu technisch befriedigenden Resultaten. Seine Grundidee der Modellierung plastischer Bereiche durch Fließstreifen lässt sich vielfältig variieren. So kann man zum Beispiel von mehreren gegeneinander geneigten Fließstreifen ausgehen oder die Verfestigung durch eine geänderte Spannungsverteilung entlang des Fließstreifens berücksichtigen.

5.3 Kohäsivzonenmodelle

Beim Dugdale Modell ist die plastische Zone auf einen Streifen reduziert, entlang dem die beiden Rissflanken mit der Spannung σ_F aufeinander einwirken. Die Grundidee der Kraftwechselwirkung der beiden Rissflanken lässt sich auf auf viele andere Bruchvorgänge übertragen, bei denen der Bruchprozess in einer schmalen Zone – der sogenannten *Kohäsivzone* – lokalisiert ist. Die entsprechenden Modelle werden als *Kohäsivzonenmodelle* bezeichnet. Sie haben in den vergangenen Jahren eine weite Verbreitung gefunden und lassen eine sachgerechte Beschreibung vieler Bruchvorgänge mit streifenförmiger Prozesszone zu. Zu den Anwendungsgebieten

gehören unter anderen duktile Metalle, faserverstärkte Materialien, Keramiken, Beton und Bruchvorgänge in der Grenzfläche zwischen zwei Materialien.

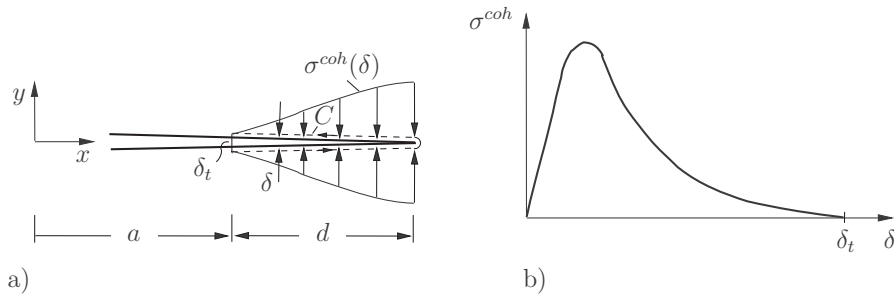


Bild 5.4 Barenblatt Modell

Das erste Kohäsivmodell wurde von 1959 G.I. **Barenblatt** zur Beschreibung des perfekten Sprödbruchs eines linear elastischen Körpers vorgeschlagen. Obwohl das Modell im Vergleich zum K -Konzept keine Vorteile bietet, sei es hier wegen der typischen Vorgehensweise kurz vorgestellt. Beim Barenblatt Modell wird die Prozesszone vor der physikalischen Risspitze als Kohäsionszone der Länge d aufgefasst, in der es zur Separation der um d verlängerten Rissflanken kommt (Bild 5.4a). Über die Länge d wirken intermolekulare *Kohäsionsspannungen* σ^{coh} , die von der Separation δ abhängig sind und die qualitativ den in Bild 5.4b dargestellten Verlauf haben (vgl. auch Bild 3.1). Im weiteren werden die folgenden drei Annahmen gemacht: 1. die Kohäsionszone ist klein im Vergleich zu allen anderen Abmessungen, d.h. $d \ll a$, 2. der Verlauf der Separation δ bzw. der Kohäsionsspannung σ^{coh} in der Kohäsionszone ist für ein gegebenes Material immer gleich und unabhängig von der äußeren Belastung, 3. die gegenüberliegenden Rissflanken schmiegen sich am Ende der Kohäsionszone glatt aneinander an. Letzteres ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass der Spannungsintensitätsfaktor an der fiktiven Risspitze verschwindet, d.h. dass die Spannungen immer beschränkt bleiben. Diese Bedingung lässt sich durch $K_I + K_I^{coh} = 0$ ausdrücken, wobei K_I und K_I^{coh} die K -Faktoren infolge alleine der äußeren Belastung und infolge alleine der Kohäsionsspannungen sind. Für K_I^{coh} erhält man unter Verwendung von Lastfall 4 aus Tabelle 4.1 das Ergebnis

$$K_I^{coh} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} T \quad \text{mit} \quad T = \int_a^{a+d} \frac{\sigma^{coh}(x)}{\sqrt{x}} dx, \quad (5.12)$$

wobei T der von Barenblatt eingeführte *Kohäsionsmodul* ist. Man kann ihn als ein Maß für den Zustand in der Prozesszone betrachten. Wegen $d \ll a$ gilt für den K -Faktor infolge der äußeren Belastung $K_I(a) = K_I(a+d)$, was wegen $K_I + K_I^{coh} = 0$

den einfachen Zusammenhang

$$T = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} K_I \quad (5.13)$$

liefert. Dementsprechend sind das Versagenskonzept auf der Basis des Barenblattschen Kohäsionsmoduls ($T = T_c$) und das K-Konzept ($K_I = K_{Ic}$) völlig gleichwertig. Die Gleichwertigkeit mit dem Griffithschen Konzept der Energiefreisetzungsrates lässt sich ebenfalls einfach zeigen. Zu diesem Zweck bestimmen wir zweckmäßig das J -Integral wobei wir die Kontur C wie beim Dugdale Modell entlang der Rissflanken in der Kohäsionszone wählen. Dann erhält man aus (4.119)

$$J = - \int_a^{a+d} \sigma^{coh}(x) \frac{d}{dx} [v^+ - v^-] dx = - \int_a^{a+d} \sigma^{coh}(x) \frac{d\delta}{dx} dx = \int_0^{\delta_t} \sigma^{coh}(\delta) d\delta. \quad (5.14)$$

Wegen $J = \mathcal{G}$ ist die Energiefreisetzungsrates also eindeutig durch die Fläche unter der $\sigma^{coh}(\delta)$ -Kurve gegeben.

Im Unterschied zum Barenblatt Modell für den Spröbruch ist die Länge der kohäsiven Prozesszone bei vielen anderen Bruchvorgängen nicht klein. Daneben muss das Grundmaterial nicht unbedingt elastisch sein sondern kann sich zum Beispiel elastisch-plastisch oder viskoelastisch verhalten. Bild 5.5 zeigt schematisch die Prozesszone für einige Materialien. Sie ist in der Regel durch *Brücken* zwischen den Rissflanken gekennzeichnet, über welche die Kohäsivkräfte übertragen werden. Deren Abhängigkeit von der Separation δ wird durch ein materialspezifisches Kohäsivgesetz $t(\delta)$ ausgedrückt, wobei wir die Kohäsionsspannung jetzt mit t bezeichnen (Bild 5.5f). Durch das Kohäsivgesetz $t(\delta)$ wird das lokale Stoffverhalten der Kohäsivzone in Form eines Spannungs-Separationsgesetzes beschrieben. Dieses Stoffgesetz unterscheidet sich aufgrund der dort stattfindenden Bruchprozesse deutlich von dem des umgebenden Materials. Durch das Kohäsivgesetz ist die spezifische Separationsarbeit

$$\mathcal{G}_c = \int_0^{\delta_c} t(\delta) d\delta \quad (5.15)$$

eindeutig festgelegt (vgl. Bild 5.5f). Sie entspricht der Energiefreisetzungsrates und dem J -Integral, wenn sich das umgebende Material elastisch verhält (vgl. auch (5.14)ff).

Je nach Material und charakteristischen Bruchprozess werden für das Kohäsivgesetz unterschiedliche Ansätze verwendet. So wurde für spröde Metalle oder Partikel-Matrix Komposite in Anlehnung an den Trennvorgang von Atomebenen nach Bild 3.1 ein Exponentialgesetz der Form

$$t = e \sigma_c \frac{\delta}{\delta_0} e^{-\delta/\delta_0} \quad \text{mit} \quad e \approx 2,72 \quad (5.16)$$

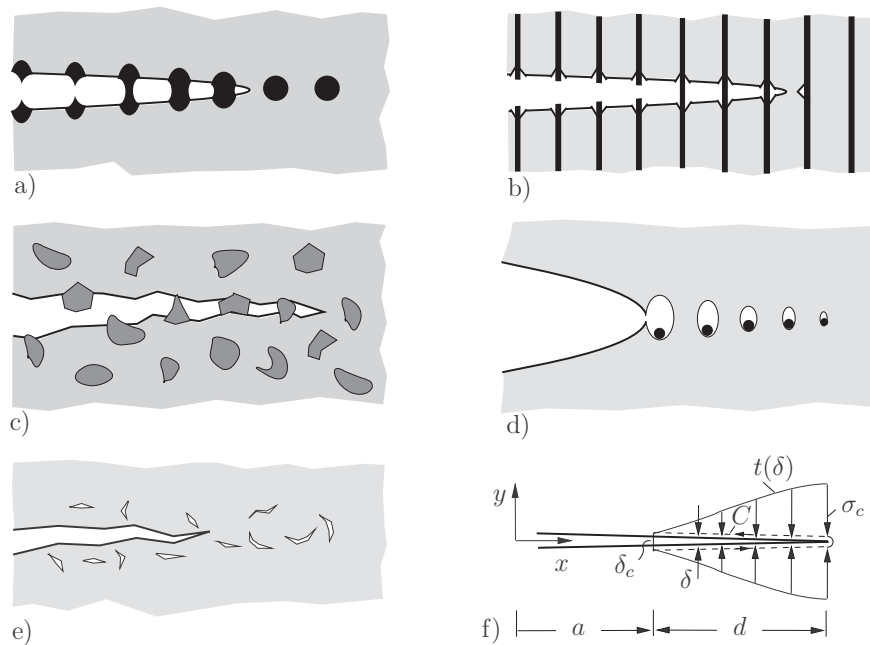


Bild 5.5 Kohäsivzone (schematisch): a) metallpartikelverstärkte Keramik; b) Faserverbundwerkstoff; c) heterogene Keramik, Beton; d) duktiler Werkstoff mit Hohlraumbildung; e) spröder Werkstoff mit Mikrorissen; f) Kohäsivzonenmodell

vorgeschlagen (Bild 5.6a). Darin sind σ_c die Maximalspannung und δ_0 die zugehörige Separation. Die spezifische Bruchflächenarbeit nach (5.15) ist für diesen Ansatz durch $\mathcal{G}_c = e \sigma_c \delta_0$ gegeben. Ein gewisser Nachteil des Exponentialgesetzes ist, dass die Kohäsivspannung genau genommen erst für $\delta \rightarrow \infty$ verschwindet. Andere Kohäsivgesetze sind zum Beispiel durch den trapezförmigen oder die bilinearen Verläufe in den Bildern 5.6b-d gegeben. Sie wurden vorgeschlagen für die Modellierung des Rissfortschrittes in elastisch-plastischen Materialien oder in der Zwischenschicht von Klebeverbindungen (Bild 5.6b), der Delamination von geschichteten Materialien (Bild 5.6c) und des Versagens von Beton oder zementartigen Werkstoffen (Bild 5.6d).

Das Kohäsivgesetz ist durch einige Parameter eindeutig bestimmt, deren Zahl sich im günstigsten Fall (z.B. beim Exponentialgesetz (5.16)) auf zwei reduzieren lässt. In letzteren Fall lassen sie sich aus den beiden charakteristischen Materialparametern a) der Bruchspannung (Bruchfestigkeit) σ_c und b) der spezifischen Separationsarbeit \mathcal{G}_c experimentell relativ einfach bestimmen.

Bei einer allgemeinen Belastung kommt es nicht nur zu einer Modus I-Separation

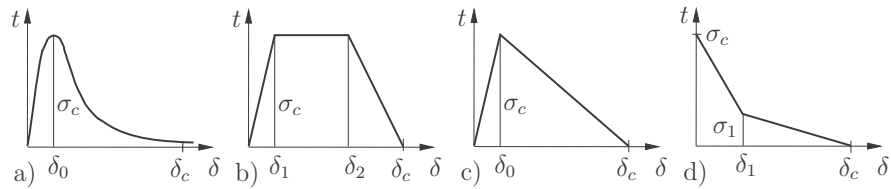


Bild 5.6 Kohäsivgesetze

δ_n normal zur Trennfläche sondern die einander gegenüberliegenden Punkte erfahren wie beim Modus II bzw. Modus III auch eine Relativverschiebung δ_t tangential zur Trennfläche. In diesem Fall bietet es sich an, das Kohäsivgesetz vektoriell zu formulieren: $\mathbf{t} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\delta})$ mit $\mathbf{t} = t_n \mathbf{e}_n + t_t \mathbf{e}_t$ und $\boldsymbol{\delta} = \delta_n \mathbf{e}_n + \delta_t \mathbf{e}_t$. Hierauf sei hier jedoch nicht näher eingegangen.

Kohäsivzonenmodelle eignen sich sehr gut zur numerischen Behandlung von Bruchvorgängen im Rahmen der Finite-Elemente-Methode. Die Kohäsivzone wird dabei mit Hilfe sogenannter Kohäsivelemente diskretisiert, die sich durch eine verschwindende Ausgangsdicke auszeichnen und deren Verhalten durch das Spannungs-Separationsgesetz gegeben ist.

Zum Schluss sei noch auf die Möglichkeit hingewiesen, Kohäsivgesetze aus mikromechanischen Schädigungsmodellen abzuleiten, wie sie in den Abschnitten 9.3 und 9.4 diskutiert werden.

5.4 Rissspitzenfeld

Wie in der linearen Bruchmechanik spielt das Feld in der Umgebung der Rissspitze auch in der elastisch plastischen Bruchmechanik eine fundamentale Rolle. Im folgenden werden wir die Rissspitzenfelder für einige Materialmodelle behandeln. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hierbei teilweise auf den Modellfall des Modus III.

5.4.1 Idealplastisches Material

5.4.1.1 Longitudinaler Schub, Modus III

Beim nichtebenen (longitudinalen) Schub treten nur die Verschiebung w sowie die Schubspannungen τ_{xz} , τ_{yz} auf. Letztere sind beim idealplastischen Material durch die Fließbedingung

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = \tau_F^2 \quad (5.17)$$

verknüpft. Nach Abschnitt 1.5.3 sind die Schnittlinien, in denen τ_F auftritt (= α -Linien), immer Geraden; in Schnitten senkrecht dazu ist die Schubspannung Null. Für die Umgebung einer Rissspitze mit belastungsfreien Rissflanken

erfüllt dementsprechend ein Liniensystem nach Bild 5.7 die Randbedingungen. Führt man Polarkoordinaten r, φ ein (φ fällt hier mit dem Winkel ϕ nach Abschnitt 1.5.2 zusammen), dann gilt für die Spannungen im Bereich des Fächers ($|\varphi| \leq \pi/2$)

$$\tau_{\varphi z} = \tau_F, \quad \tau_{rz} = 0. \quad (5.18)$$

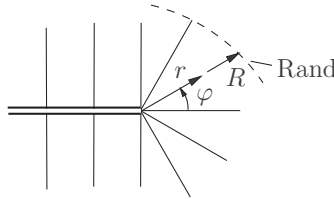


Bild 5.7 α -Linien im Modus III

Entlang einer α -Linie ist der Verschiebungszuwachs dw konstant, d.h. im Bereich des Fächers gilt $dw = dw(\varphi)$ und folglich $d\gamma_{rz} = \partial(dw)/\partial r = 0$. Das Verzerrunginkrement $d\gamma_{\varphi z} = \partial(dw)/r\partial\varphi$ lässt sich ermitteln, wenn wir annehmen, dass uns $d\gamma_{\varphi z}(R)$ entlang des Randes $R(\varphi)$ der plastischen Zone bekannt ist:

$$d\gamma_{\varphi z}(r, \varphi) = \frac{R(\varphi)}{r} d\gamma_{\varphi z}(R). \quad (5.19)$$

Setzen wir einen undeformierten Ausgangszustand voraus, so erhält man daraus durch Integration

$$\gamma_{\varphi z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{R(\varphi)}{r} \gamma_{\varphi z}(R), \quad w = \int_0^{\varphi} R(\varphi) \gamma_{\varphi z}[R(\varphi)] d\varphi; \quad (5.20)$$

dabei wurde $w(\varphi=0) = 0$ gesetzt. Die Beziehungen (5.17) bis (5.20) gelten im Bereich des Fächers allgemein, d.h. auch für beliebig große plastische Zonen. Sie zeigen, dass die Spannungen durch die Fließspannung beschränkt sind, während die Verzerrungen an der Rissspitze eine $1/r$ -Singularität besitzen.

Die Spannungen (5.18) lassen sich auch in anderer Form darstellen. So lauten die kartesischen Komponenten $\tau_{xz} = -\tau_F \sin \varphi$ und $\tau_{yz} = \tau_F \cos \varphi$. Entlang eines Kreises dessen Mittelpunkt M im Abstand r^* vor der Rissspitze liegt (Bild 5.8) folgt daraus mit dem Winkel φ^* die Darstellung

$$\tau_{xz} = -\tau_F \sin \frac{\varphi^*}{2}, \quad \tau_{yz} = \tau_F \cos \frac{\varphi^*}{2}. \quad (5.21)$$

Dies entspricht bis auf einen Faktor genau den Spannungen, die sich nach der elastischen Nahfeldlösung (4.6) auf einem Kreis um eine Rissspitze bei M ergeben (dabei sind in (4.6) der Abstand r und der Winkel φ durch die hier benutzten

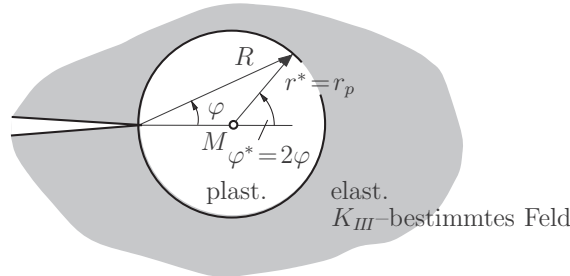


Bild 5.8 Plastische Zone im elastischen Nahfeld

Größen r^* und φ^* zu ersetzen). Man kann diese Tatsache ausnutzen, um eine exakte Lösung für den Fall des Kleinbereichsfließens zu konstruieren. Hierbei ist der plastische Bereich von einem elastischen Bereich umgeben, in welchem die elastische Nahfeldlösung gilt. An der Grenze zwischen beiden Bereichen müssen die Übergangsbedingungen erfüllt sein, das heißt, die Spannungen aus der Lösung im plastischen Bereich und aus der Lösung im elastischen Bereich müssen übereinstimmen. Dies ist in unserem Fall offenbar zu erreichen, wenn man (5.21) mit (4.6) unter Beachtung der unterschiedlichen Notation gleichsetzt: $\tau_F = K_{III}/\sqrt{2\pi r^*}$. Die plastische Zone ist also ein Kreis vor der Risspitze mit dem Radius

$$r_p = r^* = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{III}}{\tau_F} \right)^2. \quad (5.22)$$

Das gleiche Ergebnis für r_p erhält man übrigens, wenn man die plastische Zone nach Irwin aus der elastischen Nahfeldlösung abschätzt (vgl. auch Abschnitt 4.7.1). Mit (5.22) gilt für den Rand $R(\varphi)$ der plastischen Zone und für die dort auftretende Verzerrung $\gamma_{\varphi z}(R)$

$$R(\varphi) = 2r_p \cos \varphi = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{III}}{\tau_F} \right)^2 \cos \varphi, \quad \gamma_{\varphi z}(R) = \frac{\tau_F}{G}. \quad (5.23)$$

Aus (5.19) und (5.20) folgen damit im plastischen Bereich

$$\gamma_{\varphi z} = \frac{1}{r} \frac{K_{III}^2}{\pi G \tau_F} \cos \varphi, \quad w = \frac{K_{III}^2}{\pi G \tau_F} \sin \varphi. \quad (5.24)$$

Die Rissspitzenöffnung δ_t ist durch die Relativverschiebung der beiden Rissufer an der Risspitze gegeben; hierfür erhält man

$$\delta_t = w\left(\frac{\pi}{2}\right) - w\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \frac{K_{III}^2}{G \tau_F}. \quad (5.25)$$

5.4.1.2 Ebener Verzerrungszustand, Modus I

Das Feld in der Umgebung der Rissspitze lässt sich auch in diesem Fall mittels der Gleitlinientheorie nach Abschnitt 1.5.3 ermitteln. Aus Symmetriegründen können wir uns dabei auf die obere Halbebene ($y \geq 0$) beschränken (Bild 5.9a). Entlang der belastungsfreien Rissufer und der x -Achse vor der Risspitze (=Symmetrielinie) ist $\tau_{xy} = 0$. Die Gleitlinien müssen dort also unter 45° einmünden. Die Verbindung zwischen den auf diese Weise gebildeten Bereichen A und C wird durch den Viertelkreisfächer B hergestellt. Ein entsprechendes Gleitlinienfeld wird nach L. Prandtl auch *Prandtl-Feld* genannt. Mit den im Bild gewählten Bezeichnungen erhält man damit am Rissufer ($\phi = 3\pi/4$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$) aus (1.123) den „Startwert“ $\sigma_m = k$. Läuft man von da aus entlang einer β -Linie durch A , B und C ($\phi^A = 3\pi/4$, $\phi^B = \varphi$, $\phi^C = \pi/4$), so liefern die Henckyschen Gleichungen (1.124)

$$\sigma_m^A = k, \quad \sigma_m^B = k(1 + 3\pi/2 - 2\varphi), \quad \sigma_m^C = k(1 + \pi). \quad (5.26)$$

Hieraus ergibt sich nach (1.123) für die Spannungen in den einzelnen Bereichen

$$\begin{array}{c} \text{Bereich A} \qquad \text{Bereich B} \qquad \text{Bereich C} \\ \left(\begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right) = \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 + 3\pi/2 - 2\varphi - \sin 2\varphi & \pi \\ 0 & 1 + 3\pi/2 - 2\varphi + \sin 2\varphi & 2 + \pi \\ 0 & \cos 2\varphi & 0 \end{array} \right), \end{array} \quad (5.27)$$

wobei für k nach von Mises der Wert $k = \sigma_F/\sqrt{3}$ eingesetzt wurde. Rechnet man dies noch in die Komponenten in Polarkoordinaten um, so folgen die in Bild 5.9b dargestellten Verläufe.

Durch (5.26) und (5.27) ist wegen $\sigma_z = \sigma_m$ der Spannungszustand im Risspitzenbereich vollständig festgelegt. Bild 5.9c zeigt die zugehörigen Mohrschen Kreise in den drei Bereichen. Man erkennt, dass vor der Risspitze (Bereich C) der hydrostatische Anteil am Spannungszustand relativ hoch ist. Man kann dies als einen Hinweis dafür ansehen, dass dort ein mikroskopisches Porenwachstum begünstigt wird.

Entlang der Gleitlinien sind die Gleitungsänderungen maximal und die Dehnungsänderungen (in Gleitlinienrichtung) Null. Es lässt sich zeigen, dass dies für die Verzerrungen im Fächerbereich B ein Verhalten der Art

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{r} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\varphi) \quad (5.28)$$

zur Folge hat. Wie im Modus III tritt eine $1/r$ -Verzerrungssingularität auf. Die Bestimmung der Größe von ε_{ij} im gesamten plastischen Bereich und damit auch der Rissöffnung setzt die Kenntnis von ε_{ij} entlang einer Berandung voraus (d.h. zum Beispiel an der Grenze zwischen plastischem und elastischem Bereich). Deren Ermittlung ist allerdings bislang mit analytischen Methoden nicht gelungen.

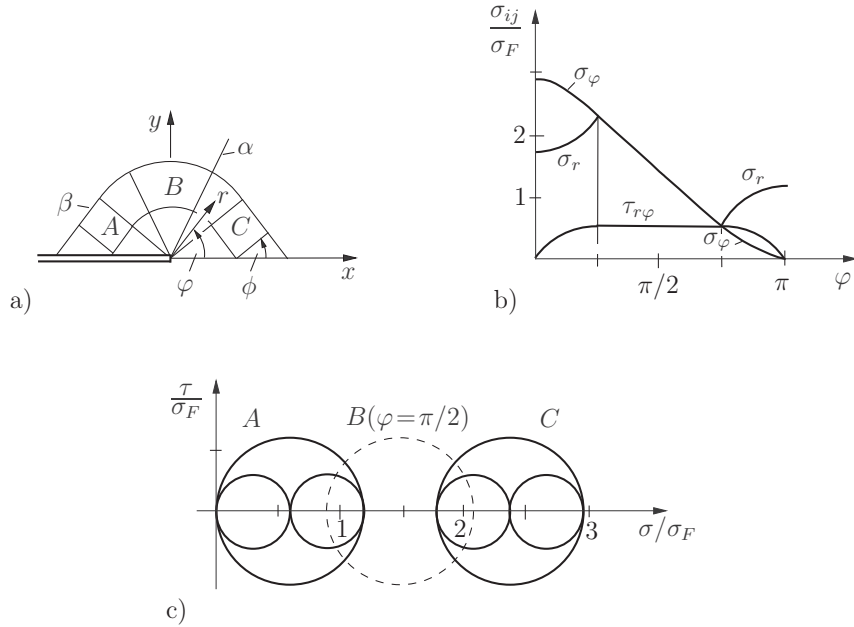


Bild 5.9 Risspitzenfeld für idealplastisches Material

Das Rissitzfeld (5.27) beschreibt zunächst nur den Zustand an einer Risspitze unter reiner Modus I Zugbelastung senkrecht zum Riss. Die Lösung bleibt jedoch auch gültig, wenn zusätzlich eine Rissparallele T-Spannung überlagert wird. In diesem Fall ändert sich lediglich die Größe ihres Gültigkeitsbereichs, d.h. die Größe der plastischen Zone. Um dies qualitativ zu veranschaulichen, betrachten wir bei gegebener konstanter Modus I Belastung den Spannungszustand an einem Punkt, der in geringem Abstand vor der Risspitze außerhalb des plastischen Bereichs liegt. Wird nun eine negative T-Spannung (Druck) überlagert, so wächst dort die maximale Schubspannung an bis sie die Fließspannung erreicht. Dies bedeutet, dass eine negative T-Spannung zu einer Vergrößerung der plastischen Zone führt. Umgekehrt ist bei Überlagerung einer positiven T-Spannung die plastische Zone kleiner als unter reiner einachsiger Zugbelastung senkrecht zum Riss.

Die Lösung (5.27) gibt die Möglichkeit, die plastische Grenzlast P_G für die Risskonfiguration nach Bild 5.10 unmittelbar zu berechnen. Entsprechend dem dargestellten Gleitlinienfeld, welches für $b \gg a$ gültig ist, tritt zwischen den beiden Risspitzen die Spannung $\sigma_y = \sigma_F(2 + \pi)/\sqrt{3}$ auf. Damit wird die Grenzlast

$$P_G = \sigma_y 2aB = \frac{2(2 + \pi)}{\sqrt{3}} aB\sigma_F. \quad (5.29)$$

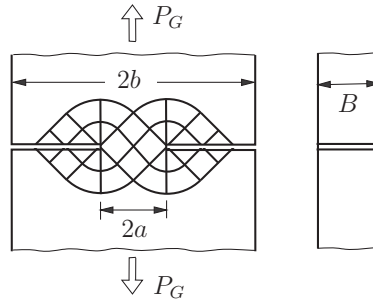


Bild 5.10 Plastische Grenzlast

Wir wollen hier noch kurz eine weitere wichtige Lösung für ein Rissspitzenfeld in ideal-plastischem Material diskutieren. Es wurde bereits erwähnt, dass der hohe hydrostatische Spannungsanteil vor einer Rissspitze in duktilen Materialien zu Porenwachstum führt. Dieser Effekt tritt noch deutlicher zutage, wenn die etwas realistischere Situation an einer abgerundeten Rissspitze nach Bild 5.11 betrachtet wird. Die Spannungsverteilung kann auch in diesem Fall mit Hilfe der Gleitlinientheorie berechnet werden. Für $y = 0$ lautet sie in kartesischen Koordinaten

$$\sigma_y = \frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}} \left[1 + \ln \left(1 + \frac{x}{r} \right) \right] , \quad \sigma_x = \frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}} \ln \left(1 + \frac{x}{r} \right) . \quad (5.30)$$

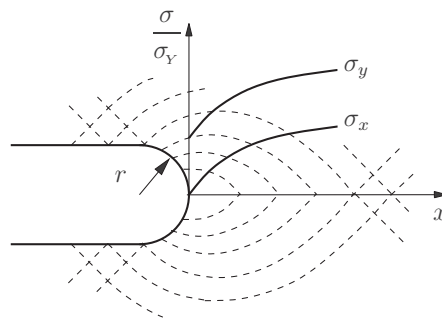


Bild 5.11 Abgerundete Rissspitze in ideal-plastischem Material

Die Gleitlinien sind nun logarithmische Spiralen, die vom spannungsfreien Rand unter Winkeln von 45° ausgehen. Im Gegensatz zur entsprechenden rein elastischen Lösung nimmt die vertikale Spannung σ_y hier mit zunehmendem Abstand von der Rissspitze zu. Die maximale hydrostatische Spannung in der (von außen durch das elastische Feld begrenzten) plastischen Zone tritt somit ein einem gewissen Abstand vor der Rissspitze auf. Dies bedeutet, dass Porenwachstum im

Innern des Materials vor der Risspitze zu erwarten ist. Die Ausdehnung der plastischen Zone und die genaue Lage der maximalen hydrostatischen Spannung können nicht im Rahmen der Gleitlinientheorie allein (starr-ideal-plastisches Material) ermittelt werden; hierzu ist eine elastisch-plastische Analyse notwendig.

Die Approximation des plastischen Materialverhaltens durch ein idealplastisches Material kann nicht vollständig befriedigen. Zwar liefert die Analyse eine Aussage über den singulären Charakter des Verzerrungsfeldes an der Risspitze, sie legt direkt aber keinen Parameter nahe, der in einem Bruchkriterium Verwendung finden sollte. Daneben ist dieses Materialmodell nicht in der Lage, eine Verfestigung zu beschreiben, die bei vielen Werkstoffen zu beobachten ist. Eine Modellierung, bei der diese Nachteile nicht auftreten, wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

5.4.2 Deformationstheorie, HRR-Feld

Im Rahmen der Deformationstheorie (vgl. Abschnitt 1.3.3.3) betrachten wir ein verfestigendes Material, dessen einachsige Spannungs-Dehnungs-Kurve durch das *Ramberg-Osgood-Gesetz*

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (5.31)$$

approximiert wird (Bild 5.12a). Darin können ε_0 , σ_0 für hinreichend kleines α als die Dehnung bzw. Spannung aufgefasst werden, bei der Fließen einsetzt; n wird als *Verfestigungsexponent* bezeichnet. Der Grenzfall $n = 1$ entspricht einem vollständig linearen Verhalten, für $n \rightarrow \infty$ nähert man sich einem elastisch-idealplastischen Material. Die beiden Terme auf der rechten Seite lassen sich als elastischer und plastischer Anteil der Dehnung interpretieren: $\varepsilon^e/\varepsilon_0 = \sigma/\sigma_0$, $\varepsilon^p/\varepsilon_0 = \alpha(\sigma/\sigma_0)^n$.

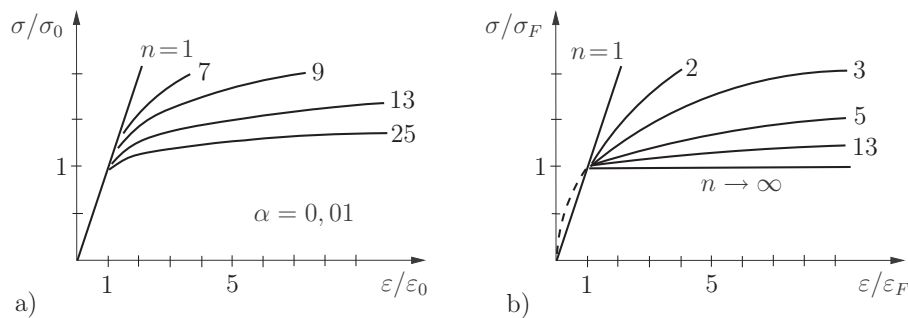


Bild 5.12 Potenzgesetz

In der Umgebung der Risspitze befinden wir uns im Fließbereich ($\varepsilon/\varepsilon_0 \gg 1$). Wegen der an der Spitze zu erwartenden Verzerrungssingularität werden dort