> fg := Gradient(f, [x, y]);

Ausgabe von Maple:

$$fg := -\frac{2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\,\overline{e}_x - \frac{2y}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\,\overline{e}_y$$

Da der Gradient ein Vektor ist, besitzt er einen Betrag und eine Richtung. Dies kann mit Hilfe von Pfeilen dargestellt werden, wobei die Pfeillänge (oder Pfeildicke) dem Betrag entspricht. Das Vektorfeld wird als zweidimensionale Funktion gezeichnet.

> $p4$:= gradplot(f, x = –2..2, y = –2..2, arrows = thick, grid = [10, 10]):

> display($p4$);

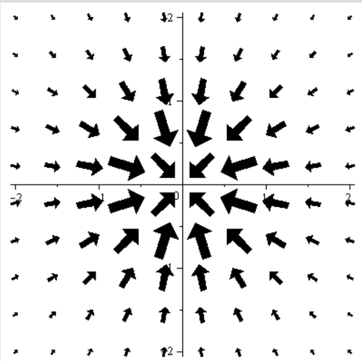

Abb. 12: Gradient der Funktion f

Die Höhenlinien und der Gradient der Funktion f können gemeinsam in einem Plot abgebildet werden.

> display($p3$, $p4$);

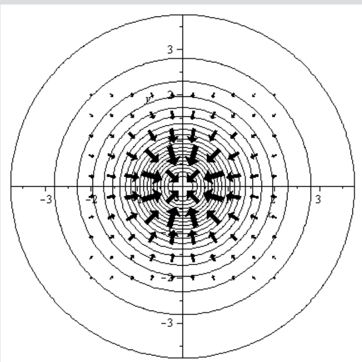

Abb. 13: Höhenlinien und Gradient der Funktion f

Mathematisch bedeutet dies, dass ein Kurvenintegral eines Vektorfeldes über eine geschlossene Kurve C in ein Flächenintegral des Vektorfeldes umgewandelt werden kann und umgekehrt.

Besonders nützlich ist der Satz von Green zur Berechnung von Flächen. Betrachten wir die Funktionen $F_1(x,y) = -y$ und $F_2(x,y) = x$. Dann gilt:

$$\oint_C (-y\,dx + x\,dy) = \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x} x - \left(\frac{\partial}{\partial y}(-y)\right)\right] dx\,dy = 2\iint_A dx\,dy = 2 \cdot A$$

Somit ist die Fläche des von der Kurve C begrenzten Bereiches:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx)} \tag{2.84}$$

Diese Gleichung entspricht der Sektorformel von Leibniz und ist ein Sonderfall des Satzes von Green.

Ist der Rand von A durch eine geschlossene Kurve $C(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ darstellbar, so folgt:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\int_{t=a}^{t=b} \left[x(t)\,y'(t) - y(t)\,x'(t)\right] dt} \tag{2.85}$$

Beispiel 69

Es soll die Fläche A einer Ellipse bestimmt werden, deren Kurve C durch die Mittelpunktsgleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ definiert ist.

Lösung:

Eine Parameterdarstellung der Ellipse ist $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(t) \\ b \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$x'(t) = -a \cdot \sin(t); \quad y'(t) = b \cdot \cos(t)$$

$$A = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[a \cdot \cos(t) \cdot b \cdot \cos(t) - \left[b \cdot \sin(t) \cdot (-a \cdot \sin(t))\right]\right]$$

$$A = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \underline{\underline{ab\pi}}$$

verschoben, die Atome bzw. Moleküle werden zu Dipolen verformt. Dies führt zu einer *scheinbaren* Ladungstrennung. Die Schwerpunkte der Kerne und der Elektronenhülle der einzelnen Atome verschieben sich gegeneinander. Diese Verschiebung ist in der Größenordnung des Kerndurchmessers. Ein elektrisch isolierender Stoff wird in diesem Zusammenhang als **Dielektrikum** bezeichnet. Die Bildung von Dipolen in einem Dielektrikum wird **dielektrische Polarisation** genannt.

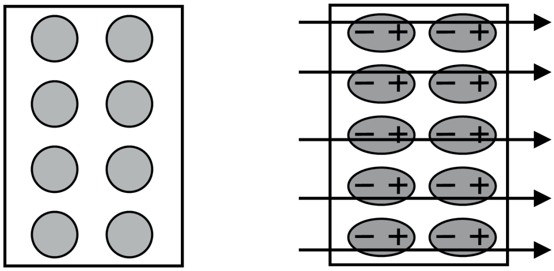

Abb. 45: Elektrisch neutrale Atome im Nichtleiter ohne äußeres elektrisches Feld (links) und durch äußeres elektrisches Feld polarisierte Atome (rechts)

Die polarisierten Ladungen im Inneren des Dielektrikums neutralisieren sich gegenseitig. Die Polaritäten auf den Oberflächen bleiben erhalten und erscheinen als Flächenladungsdichten. Die Wirkung dieser Flächenladungen kann durch ein elektrisches Feld, das dem äußeren Feld entgegengesetztem Polarisationsfeld, beschrieben werden. Analog zur Influenz wird also ein Gegenfeld erzeugt, welches aber das ursprüngliche Feld im Material nur abschwächen, aber nicht aufheben kann. Ein Maß für die Polarisation ist die Dielektrizitätskonstante »ε«. Die Stärke der Polarisation im Dielektrikum ist je nach Stoffart unterschiedlich, der Zahlenwert von ε hängt hauptsächlich von der Art des Materials ab, welches das Dielektrikum bildet.

Bildet ein Vakuum das Dielektrikum, so kann keine Polarisation auftreten, da kein Stoff vorhanden ist. Die für ein Vakuum gültige Dielektrizitätskonstante wird mit ε_0 bezeichnet und heißt **elektrische Feldkonstante,** *absolute Dielektrizitätskonstante* oder *Dielektrizitätskonstante des Vakuums***.**

Der Wert der elektrischen Feldkonstanten ist

$$\boxed{\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}} \tag{4.2}$$

Für irgendeinen Stoff lässt sich die **Permittivität** (Dielektrizitätskonstante) in folgender Form darstellen:

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\mathrm{r}} \tag{4.3}$$

fläche erfolgt. Mit anderen Worten: In einem abgeschlossenen Volumen kann sich eine Ladung nur durch Zufluss oder Abfluss von Ladungen durch die Oberfläche ändern.

Der Leitungsstrom, der dem Ladungstransport entspricht, kann als Fluss der Leitungsstromdichte durch die Hüllfläche dargestellt werden. Der aus dem Raumgebiet V über die Hüllfläche A herausfließende Strom ist nach Gl. (5.21)

$$\boxed{I = \oint\!\!\oint_A \vec{S} \bullet d\vec{A}} \tag{5.27}$$

Dieser Strom muss gleich sein der *Abnahme* der Ladungsmenge pro Zeiteinheit $-dQ/dt$ im Raumgebiet V, da Strom definiert ist als Änderung der Ladung pro Zeiteinheit (Abschnitt 5.2.1). Als Gleichung für die Ladungsbilanz gilt:

$$\boxed{\underbrace{-\frac{dQ}{dt}}_{\substack{\text{Ladungsabnahme}\\ \text{im Volumen}}} = \underbrace{\oint\!\!\oint_A \vec{S} \bullet d\vec{A}}_{\substack{\text{Teilchenstrom}\\ \text{aus dem Volumen}}}} \tag{5.28}$$

Der Flächenvektor $d\vec{A}$ weist aus dem eingeschlossenen Raumgebiet V heraus.

Nun wird ein Zusammenhang mit der Raumladungsdichte hergestellt. Die Gesamtladung einer im Raum verteilten Raumladung ist nach Gl. (4.13)

$$\boxed{Q = \iiint_V \rho \, dV} \tag{5.29}$$

Wir erhalten damit

$$\boxed{-\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV = \oint\!\!\oint_A \vec{S} \bullet d\vec{A}} \tag{5.30}$$

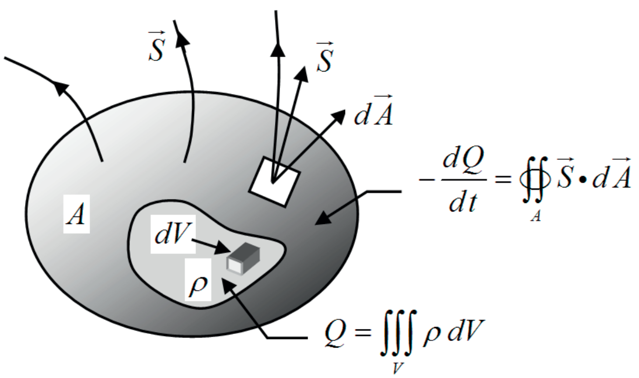

Abb. 58: Ein Ladungsfluss durch die Hüllfläche eines Volumens ergibt eine Änderung der Raumladung im Volumen